

Mathématiques Sans Frontières



Epreuve définitive du 4 mars 2010

- ✓ Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.
- ✓ Des explications ou des justifications sont demandées pour les exercices 1, 7, 9, 10, 11, 12 et 13.
- ✓ Toute solution même partielle sera examinée.
- ✓ Le soin sera pris en compte.



Exercice 1 7 points

Mathémagique

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Du bist Magier.

Du präsentierst einem Zuschauer 3 Spielsteine.

Diese drei Spielsteine haben jede eine schwarze Seite und eine farbige Seite: einer eine rote, ein anderer eine grüne und der letzte eine blaue.

Die 3 Spielsteine liegen in einer Reihe, ihre farbigen Seiten sind sichtbar.

Du bittest den Zuschauer sich eine der drei Farben auszusuchen, ohne sie zu verraten. Währenddessen merkst du dir genau die Farbe des Spielsteins, der in der Mitte liegt.

Man verbindet dir die Augen. Du bittest den Zuschauer, die beiden Spielsteine mit den nicht gewählten Farben zu vertauschen und anschließend alle drei Spielsteine umzudrehen.

Die schwarzen Seiten der Spielsteine liegen nun oben.

Die Augenbinde wird entfernt. Du bittest den Zuschauer die Spielsteine so umzulegen, wie er es will. Dabei lässt du den Spielstein, der sich in der Mitte befand, nicht aus den Augen.

Nun drehst du einen Spielstein um und nennst danach die vom Zuschauer ausgewählte Farbe.

Wie hast du das gemacht?

Eres un mago.

Enseñas 3 fichas a un espectador.

Las tres fichas tienen una cara negra y otra coloreada: una en rojo, otra en verde y la última en azul.

Las 3 fichas están alineadas y sus caras coloreadas visibles.

Le pides al espectador que elija uno de los 3 colores en secreto. Mientras tanto, miras bien el color de la ficha de en medio.

Te vendan los ojos. Le pides al espectador que intercambie las fichas con los colores que no ha elegido y que luego le de la vuelta a las 3 fichas.

Aparecen ahora sus caras negras.

Te quitan la venda. Le pides al espectador que mueva las fichas como quiera, pero no le quitas ojo a la que estaba en medio.

Entonces le das la vuelta a una ficha y anuncias el color de la ficha elegida por el espectador.

¿Cómo lo has hecho?

You are a magician.

You show a volunteer from the audience 3 tokens.

The three tokens each have a black side and a coloured side: red for one, green for another and blue for the last one.

The 3 tokens are laid in a line with their coloured sides showing and the black side down.

You ask your volunteer to choose one of the three colours and keep his choice secret. You make sure that you have noticed the colour of the middle token.

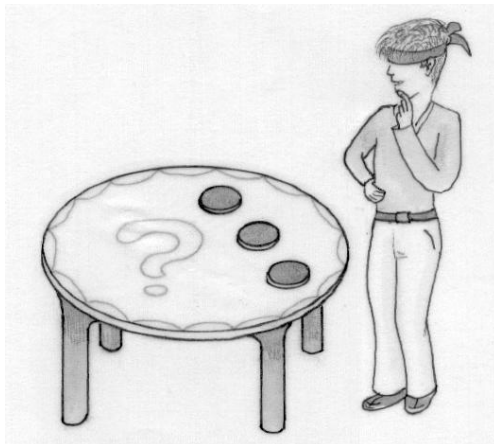
You are now blindfolded. You ask your volunteer to change round the positions of the colours he has not chosen. And then to turn the 3 tokens over.

You now see the black sides.

The blindfold is removed. You ask your volunteer to move the tokens around as he likes but you keep your eyes on the one which was in the middle.

You turn one token over and then you announce the colour of the token chosen by your volunteer.

How do you do it?



Tu sei un mago.

Mostri 3 gettoni a uno spettatore. Questi gettoni hanno tutti una faccia nera e una colorata: rossa, verde e blu.

I tre gettoni sono allineati in modo che le facce colorate siano visibili.

Domandi allo spettatore di scegliere

mentalmente uno dei 3 colori, mentre memorizzi il colore del gettone centrale.

Subito dopo, ti bendano gli occhi e tu chiedi allo spettatore di scambiare i gettoni dei colori non scelti, capovolgendoli, poi, tutti e tre. Così i gettoni presentano tutti la faccia nera.

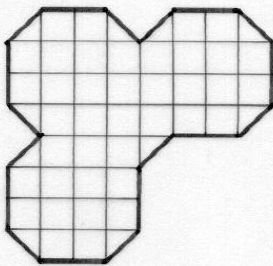
Tolta la benda, chiedi allo spettatore di spostare i gettoni come preferisce e continui a tenere lo sguardo fisso sul gettone che era centrale.

A questo punto giri un gettone e annunci il colore che aveva scelto lo spettatore.

Come hai ragionato per scoprire il colore scelto dallo spettatore?

Exercice 2
5 points

Chacun a sa place



Plan de l'espace de travail

Dans ses nouveaux locaux, M. Grandjean doit partager un espace de travail (voir le plan ci-contre) entre les quatre jeunes cadres dynamiques de son entreprise. Par souci d'équité, il veut leur proposer des bureaux de mêmes dimensions et de forme identique.

Comment faut-il placer les cloisons pour partager cet espace comme il le voudrait ? Reproduire le plan et les cloisons sur la feuille-réponse.



Exercice 3
7 points

La pierre d'angle

L'architecte Moïtep présente à son pharaon les plans de la pyramide régulière que celui-ci lui a commandée.

Elle mesure 140 mètres de haut. Sa base est un carré de 220 m de côté.

Les pierres qui la constituent ont toutes 70 cm de haut et sont réparties en 200 couches horizontales.

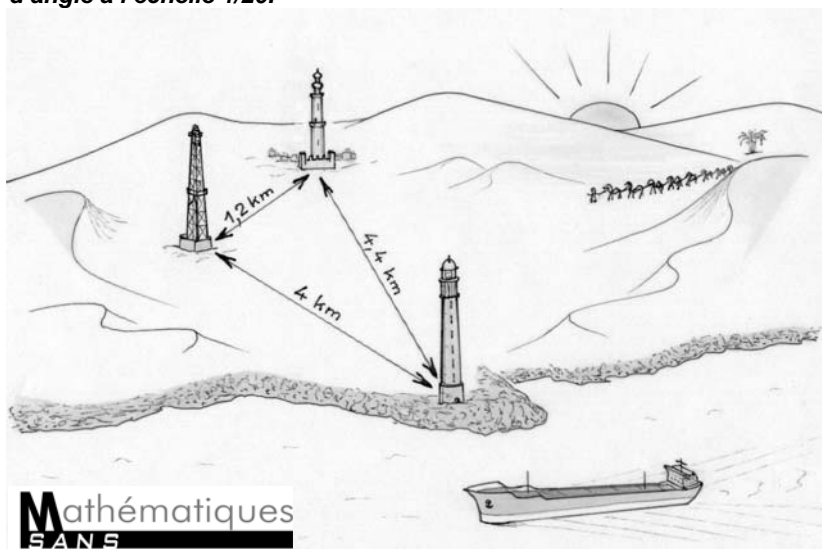
La pierre sommitale est une pyramide.

Les pierres d'angle qui composent les arêtes de la pyramide sont toutes identiques : leurs bases inférieures sont des carrés de côté 1,10 m ; leurs bases supérieures sont également des carrés.

Les autres faces sont des trapèzes rectangles.



Tracer sur la feuille-réponse un patron d'une pierre d'angle à l'échelle 1/20.

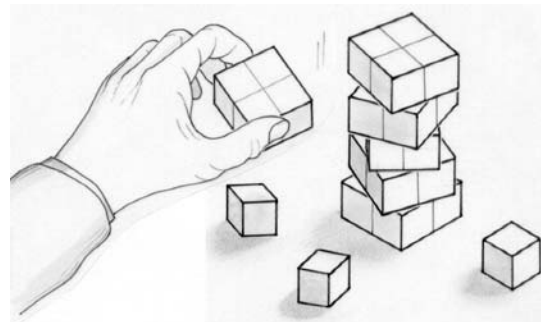


Exercice 4
5 points

3D

Céline possède trois cubes d'arête 2 cm et six pavés droits de dimensions 4 cm × 4 cm × 2 cm. Chacune de ces pièces est d'une couleur différente.

Il est possible de construire avec ces neuf pièces un cube d'arête 6 cm.



Représenter ce grand cube en perspective cavalière en distinguant les pièces visibles par des couleurs différentes. On ne dessinera pas les arêtes cachées.

Exercice 5
7 points

Gardez le cap !

Le capitaine Leguevel est à la barre d'un pétrolier qui fend les eaux calmes de la Mer Rouge en longeant la côte. Il garde un cap constant et maintient une vitesse constante de 36 km/h. La visibilité est excellente. Il observe plusieurs alignements : à 7h, il voit un phare devant un derrick ; à 7h05, il voit le même phare devant un minaret ; à 7h15, il voit le derrick devant le minaret.

Le capitaine mesure les distances suivantes sur sa carte :

phare-minaret 4,4 km ; phare-derrick 4 km ; minaret-derrick 1,2 km.

Représenter, à l'échelle 1/50 000, le triangle formé par le phare, le minaret et le derrick.

Tracer du mieux possible la droite représentant la route suivie par le pétrolier.

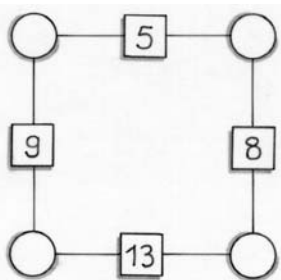
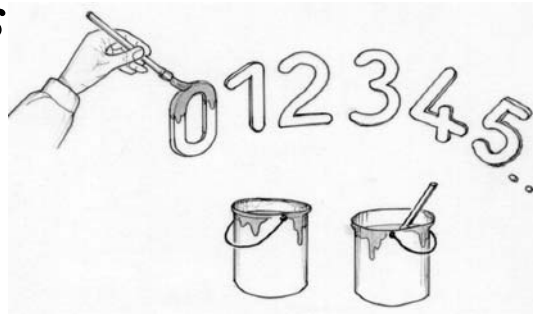
Exercice 6
5 points

La couleur des nombres

On décide d'attribuer une couleur (rouge ou bleu) aux nombres entiers naturels en respectant les règles suivantes :

- Le nombre 0 est bleu.
- Si un nombre entier peut s'écrire comme la somme d'**au moins deux** entiers rouges **distincts**, alors il est bleu. Dans le cas contraire, il est rouge.

Donner la liste des entiers rouges inférieurs à 50.



Exercice 7
7 points

Très impossible

On peut vérifier qu'on ne peut pas trouver d'entiers naturels à mettre dans les disques pour que le nombre dans chaque carré soit la somme des entiers placés dans les deux disques voisins.

Quel nombre doit-on mettre à la place du 13 pour que ce problème ait une solution ? Cette solution est-elle alors unique ? Expliquer.

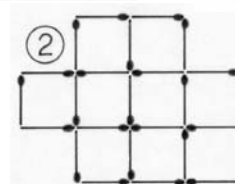
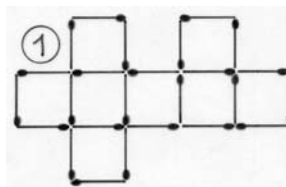
Exercice 8
5 points

Carrés d'allumettes

En posant 25 allumettes à plat sur une table, on peut construire 8 carrés de côté unitaire si on les dispose comme sur la figure ① :

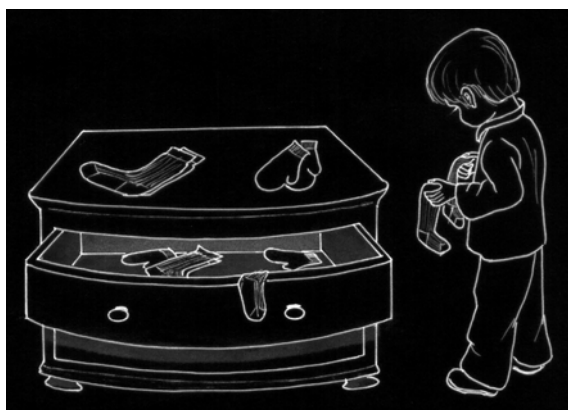
et 9 carrés de côté unitaire si on les dispose comme sur la figure ② :

Construire le plus grand nombre possible de carrés unitaires avec 100 allumettes. Présenter un dessin de la solution trouvée.



Exercice 9
7 points

Travail au noir



Geoffroy Audoy est très désordonné : dans le tiroir de sa commode, on trouve pêle-mêle 5 paires de chaussettes noires, 5 paires de chaussettes rouges, 3 paires de gants bleus et 3 paires de gants verts.

Un matin d'hiver alors qu'il fait encore nuit et qu'il y a une panne de courant, Geoffroy souhaite sortir de son tiroir une paire de chaussettes assorties et une paire de gants assortis.

Transi de froid, il est incapable de distinguer au toucher une chaussette d'un gant.

Quel est le plus petit nombre d'objets que Geoffroy doit sortir de son tiroir pour être certain d'avoir au moins une paire de chaussettes assorties et une paire de gants assortis ? Expliquer.

On rappelle que, contrairement aux gants, les chaussettes ne sont ni de droite, ni de gauche.

Exercice 10
10 points

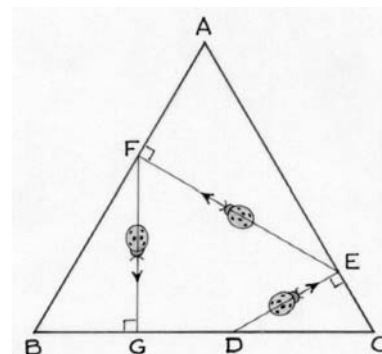
Le retour de la coccinelle

Une coccinelle se promène dans un triangle équilatéral ABC de côté 12 cm. Partant d'un point D du côté [BC], elle se dirige vers le côté [AC] suivant le chemin le plus court : elle l'atteint en E.

De là elle repart en direction du côté [AB] suivant le chemin le plus court : elle l'atteint en F.

De même, elle repart en direction de [BC], qu'elle atteint en G.

Où faut-il placer le point de départ D sur [BC] pour que le point G soit confondu avec D ? Expliquer.



SPECIAL SECONDE

Exercice 11
5 points

Salle modulable

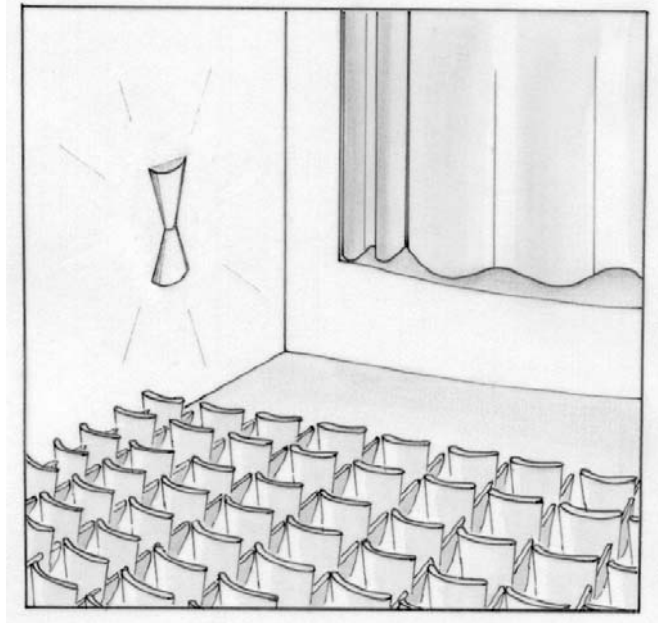
La ville de Fiestacity dispose d'une belle salle de spectacle modulable.

La salle peut être configurée de 3 manières différentes. Dans chacune de ces configurations, les sièges sont disposés en rectangle, chaque rangée comptant le même nombre de places.

En enlevant à la configuration initiale tous les sièges du 1^{er} rang, on peut augmenter de 4 unités le nombre de sièges de chaque rangée restante tout en gardant le même nombre total de places disponibles dans la salle.

On peut aussi décider d'ajouter 4 rangées de sièges à la configuration initiale, toujours sans modifier le nombre total de places dans la salle ; mais, dans ce cas, le nombre de sièges par rangée diminue de 11 unités.

Quel est le nombre total de places dans cette salle ? Justifier.



Exercice 12
7 points

Défi de dés

Par un après-midi pluvieux, Anatole et Barnabé se sont amusés à fabriquer des dés un peu particuliers : les nombres sur les faces opposées sont égaux.

Anatole a fabriqué le dé A avec les nombres 2, 4, 10 et Barnabé le dé B avec les nombres 3, 5, 8.

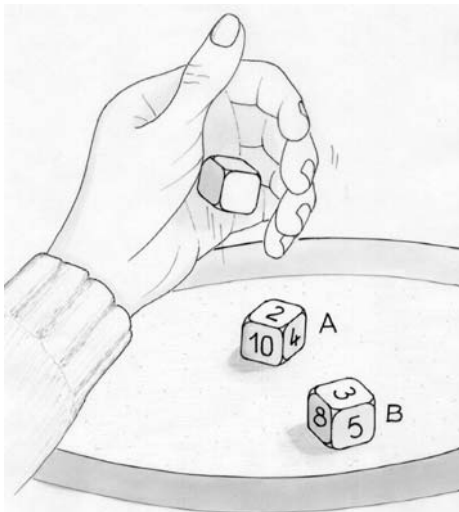
Ils lancent leurs dés simultanément. Chaque face a la même probabilité d'apparaître.

Un joueur gagne lorsque le nombre obtenu sur la face supérieure de son dé est strictement supérieur au nombre obtenu par son adversaire.

Quelle est la probabilité pour qu'Anatole gagne ? Expliquer.

Arrive leur sœur Chloé qui leur lance le défi suivant : « Construisez-moi un dé du même type avec trois autres nombres tel que si je joue contre Anatole j'ai moins de 50% de chance de gagner et si je joue contre Barnabé j'ai plus de 50% de chance de gagner. »

Donner un exemple de dé relevant ce défi.



Exercice 13
10 points

Chapeau chinois

Lauralie a une amie en Chine qui lui a envoyé une photo d'elle en costume traditionnel avec une belle coiffe. Tout en rêvant à son prochain voyage en Chine, Lauralie prend une bande de papier rectangulaire, la plie en deux et fait apparaître un pentagone qui a un axe de symétrie. Ce pentagone ressemble à la coiffe de son amie.

Faire ce pliage avec une bande de 12 cm de large.

Déterminer par calcul la longueur de la bande pour laquelle la hauteur h du pentagone est égale à sa base d .

Coller le pliage sur la feuille-réponse.

